

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

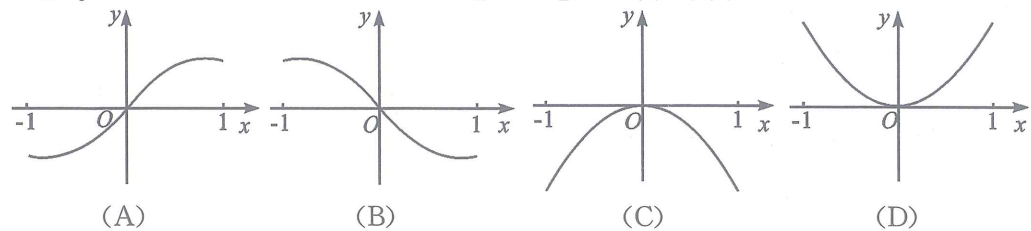
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

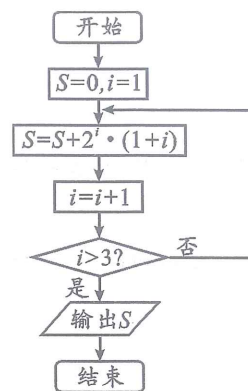
一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 z 满足 $z(1+i)=2$ (i 为虚数单位),则 z 的虚部为
(A) i (B) $-i$ (C) -1 (D) 1
2. 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x<1\}$, $N=\{x|x>2\}$,则 $(\complement_U M) \cap N =$
(A) $\{x|x>2\}$ (B) $\{x|x\geq 1\}$ (C) $\{x|1<x<2\}$ (D) $\{x|x\geq 2\}$
3. 某中学有高中生 1500 人,初中生 1000 人。为了解该校学生自主锻炼的时间,采用分层抽样的方法从高中生和初中生中抽取一个容量为 n 的样本。若样本中高中生恰有 30 人,则 n 的值为
(A) 20 (B) 50 (C) 40 (D) 60
4. 曲线 $y=x^3-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为
(A) $2x-y=0$ (B) $2x+y-2=0$
(C) $2x+y+2=0$ (D) $2x-y-2=0$
5. 已知锐角 α 满足 $2\sin 2\alpha=1-\cos 2\alpha$,则 $\tan \alpha =$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4
6. 函数 $f(x)=\cos x \cdot \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 在 $[-1,1]$ 的图象大致为



7. 执行如图所示的程序框图,则输出 S 的值为

- (A) 16
(B) 48
(C) 96
(D) 128



8. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$,则函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为

- (A) $x=k\pi-\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ (B) $x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
(C) $x=\frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (D) $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

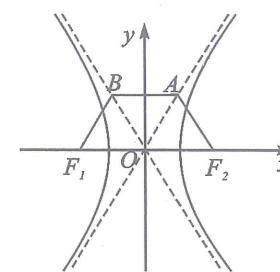
9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P, Q 分别为 A_1D_1, D_1C_1 的中点.在平面 $ABCD$ 中,过 AB 的中点 M 作平面 DPQ 的平行线交直线 BC 于 N ,则 $\frac{BN}{BC}$ 的值为

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{2}{3}$

10. 如图,双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左,右焦点分别是

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,直线 $y=\frac{bc}{2a}$ 与双曲线 C 的两条渐近线分别相交于 A, B 两点.若 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$,则双曲线 C 的离心率为

- (A) 2 (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
(C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



11. 已知 EF 为圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的一条直径,点 $M(x, y)$ 的坐标满足不等式组 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0, \\ 2x+y+3 \geq 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $\vec{ME} \cdot \vec{MF}$ 的取值范围为

- (A) $[\frac{9}{2}, 13]$ (B) $[4, 13]$ (C) $[4, 12]$ (D) $[\frac{7}{2}, 12]$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}, g(x)=xe^{-x}$.若存在 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=g(x_2)<0$ 成立,则 x_1x_2 的最小值为

- (A) -1 (B) $-\frac{2}{e}$ (C) $-\frac{2}{e^2}$ (D) $-\frac{1}{e}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 2^x, & x \leq 0. \end{cases}$ 则 $f(f(-1)) =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, a = 2, b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

15. 设直线 $l: y = x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 相交于 A, B 两点, 若弦 AB 的中点的横坐标为 2, 则 p 的值为 _____.

16. 已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上. 若球 O 的表面积为 28π , 则该三棱柱的侧面积为 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 = 1$, 且 $2a_2, \frac{3}{2}a_3, a_4$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

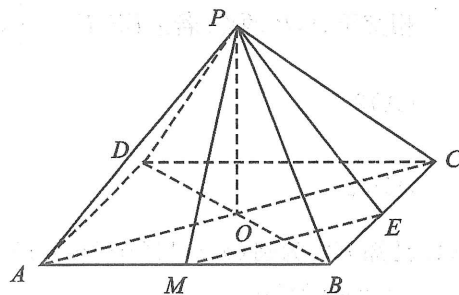
(II) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+2}}, n \in \mathbf{N}^*$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的中心, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, M, E 分别为 AB, BC 的中点.

(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PE = 3$, 求三棱锥 $B-PEM$ 的体积.



19. (本小题满分 12 分)

某动漫影视制作公司长期坚持文化自信, 不断挖掘中华优秀传统文化中的动漫题材, 创作出一批又一批的优秀动漫影视作品, 获得市场和广大观众的一致好评, 同时也为公司赢得丰厚的利润. 该公司 2013 年至 2019 年的年利润 y 关于年份代号 x 的统计数据如下表(已知该公司的年利润与年份代号线性相关):

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
年利润 y (单位: 亿元)	29	33	36	44	48	52	59

(I) 求 y 关于 x 的线性回归方程, 并预测该公司 2020 年(年份代号记为 8)的年利润;

(II) 当统计表中某年年利润的实际值大于由(I)中线性回归方程计算出该年利润的估计值时, 称该年为 A 级利润年, 否则称为 B 级利润年. 将(I)中预测的该公司 2020 年的年利润视作该年利润的实际值, 现从 2015 年至 2020 年这 6 年中随机抽取 2 年, 求恰有 1 年为 A 级利润年的概率.

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 E 上.

(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 设直线 $l: x = my + 1 (m \in \mathbf{R})$ 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相交于 C, D 两点, 当 $|AB| \cdot |CD|^2$ 的值为 $8\sqrt{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - mx - m \ln x$, 其中 $m > 0$.

(I) 若 $m = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 设 $g(x) = f(x) + mx$. 若 $g(x) > \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = m^2, \\ y = 2m \end{cases} (m \text{ 为参数})$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta + 1 = 0$.

(I) 求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(II) 已知点 $P(2, 1)$, 设直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 求 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$.

(I) 解不等式 $f(x) \geq 6$;

(II) 设 $g(x) = -x^2 + 2ax$, 其中 a 为常数. 若方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 a 的取值范围.