

武侯区 2021~2022 学年度上期期末考试试题

九年级数学

注意事项:

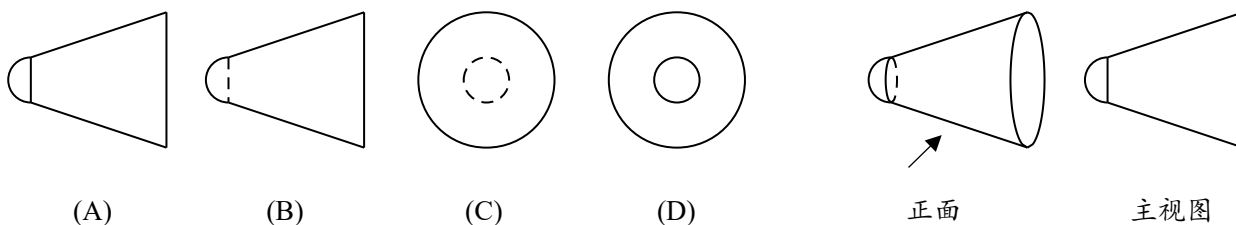
1. 全卷分 A 卷和 B 卷, A 卷满分 100 分, B 卷满分 50 分; 考试时间 120 分钟.
2. 在作答前, 考生务必将自己的姓名、准考证号涂写在试卷和答题卡规定的地方. 考试结束, 监考人员将试卷和答题卡一并收回.
3. 选择题部分必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题部分必须使用 0.5 毫米黑色的签字笔书写, 字体工整、字迹清楚.
4. 请按照题号在答题卡上各题目对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题均无效.
5. 保持答题卡清洁, 不得折叠、污染、破损等.

A 卷(共 100 分)

第 I 卷(选择题, 共 30 分)

一、选择题(本大题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 每小题均有四个选项, 其中只有一项符合题目要求, 答案涂在答题卡上)

1. 一元二次方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的二次项系数、一次项系数和常数项分别为
(A) 1, -2, -4 (B) 1, 2, 4 (C) 1, 2, -4 (D) 1, -2, 4
2. 某几何体的主视图如右图所示, 则它的左视图为



3. 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ ($x \neq 0$), 则下列式子正确的是
(A) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ (B) $y:x = 3:2$ (C) $2x = 3y$ (D) $\frac{x}{x+y} = \frac{2}{5}$
4. 2021 年“世界水日”的主题为“珍惜水、爱护水”. 小明家安装了节水龙头后, 他记录了 50 天的日用水量数据(单位: m^3), 得到频数分布表如下:

日用水量 x	$0 \leq x < 0.1$	$0.1 \leq x < 0.2$	$0.2 \leq x < 0.3$	$0.3 \leq x < 0.4$	$0.4 \leq x < 0.5$	$0.5 \leq x < 0.6$
频数	2	3	5	20	15	5

在记录的这 50 天中, 日用水量小于 0.4 m^3 的频率为

- (A) 0.9 (B) 0.6 (C) 0.3 (D) 0.2

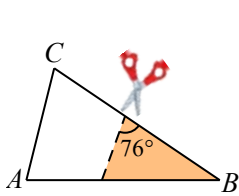
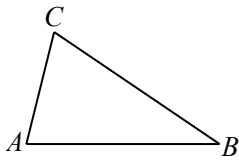
5. 下列说法中，是正方形具有而矩形不具有的性质是

- (A) 两组对边分别平行 (B) 对角线互相垂直
(C) 四个角都是直角 (D) 对角线互相平分

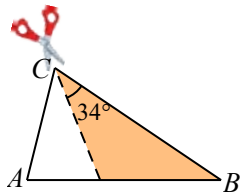
6. 用配方法解方程 $x^2 + 4x - 5 = 0$ ，配方后正确的是

- (A) $(x+2)^2 = 9$ (B) $(x+2)^2 = 5$ (C) $(x-2)^2 = 1$ (D) $(x+4)^2 = 21$

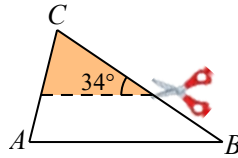
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 纸片中， $\angle A = 76^\circ$ ， $\angle B = 34^\circ$ 。将 $\triangle ABC$ 纸片沿某处剪开，下列四种方式中剪下的阴影三角形与原三角形相似的是



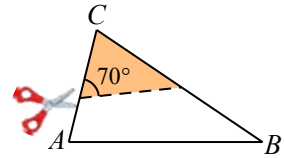
①



②



③



④

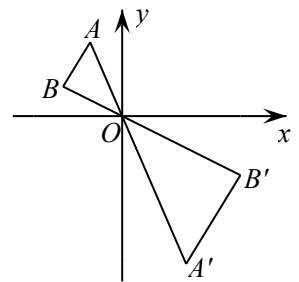
- (A) ①② (B) ②④ (C) ①③ (D) ③④

8. 关于反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象与性质，下列说法正确的是

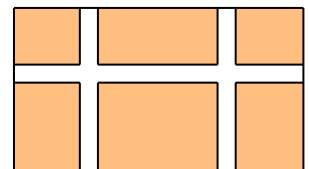
- (A) 图象分别在第二、四象限 (B) y 的值随 x 值的增大而减小
(C) 当 $x > -2$ 时， $y < -3$ (D) 点 $(1, 6)$ 和点 $(6, 1)$ 都在该图象上

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以点 O 为位似中心，把 $\triangle AOB$ 放大到原来的 2 倍，得到 $\triangle A'OB'$ ，若点 B 的对应点 B' 的坐标是 $(4, -2)$ ，则点 B 的坐标是

- (A) $(2, 1)$ (B) $(2, -1)$
(C) $(-2, 1)$ (D) $(-2, -1)$



10. 2021 年，成都已超额完成全年改造老旧小区 300 个的计划，大力促进了城市宜居品质提升。如图，某小区改造修建一个长 32 m，宽 18 m 的矩形小花园，并在花园内修建了一条水平、两条竖直的宽度相同的小路，余下部分种植花草进行绿化(图中阴影部分)。设小路宽为 x m，若绿化面积为 448 m^2 ，则可列方程为



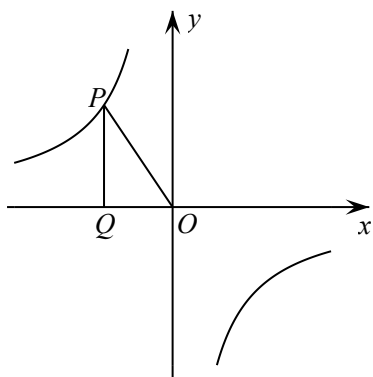
- (A) $32 \times 18 - 32x - 18x = 448$ (B) $32 \times 18 - 64x - 18x = 448$
(C) $(32 - x)(18 - 2x) = 448$ (D) $(32 - 2x)(18 - x) = 448$

第II卷(非选择题, 共 70 分)

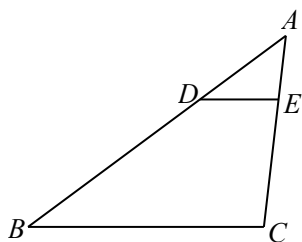
二、填空题(本大题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 答案写在答题卡上)

11. 已知 m 是一元二次方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的一个根, 则 $m^2 - m$ 的值_____.

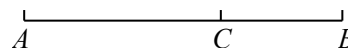
12. 如图, 点 P 在反比例函数 $y = -\frac{2\sqrt{5}}{x}$ 的图象上, 连接 OP , 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 Q , 则 $\triangle OPQ$ 的面积为_____.



第 12 题图



第 13 题图



第 14 题图

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AB 边上, 且 $BD = 2AD$, 过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E , 若 $\triangle ADE$ 的周长为 7, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

14. 如图, 在某校的 2022 年新年晚会中, 舞台 AB 的长为 20 米, 主持人站在点 C 处自然得体, 已知点 C 是线段 AB 上靠近点 B 的黄金分割点, 则此时主持人与点 A 的距离为_____米.

三、解答题(本大题共 6 个小题, 共 54 分, 解答过程写在答题卡上)

15. 解方程(本小题满分 12 分, 每题 6 分)

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$;

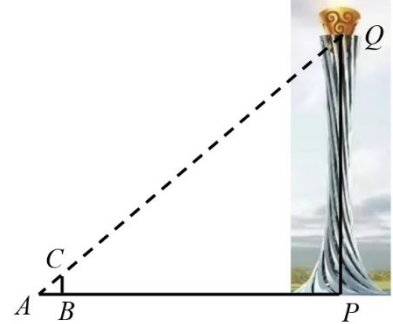
(2) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) = 0$.

16. (本小题满分 6 分)

已知 $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \neq 0$, 且 $a + b - 2c = 3$, 求 a 的值.

17. (本小题满分 8 分)

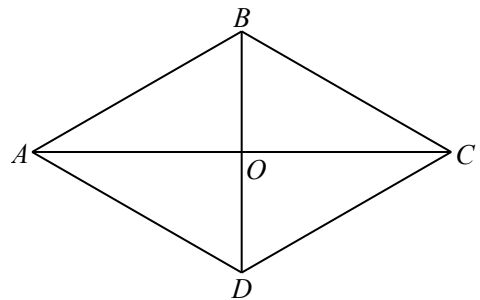
爱成都，迎大运，成都东安湖体育公园是第 31 届世界大学生夏季运动会的主场馆所在地，如图为该公园内的大运会火炬塔。某校九年级学习兴趣小组想利用所学知识测量火炬塔塔身 PQ 的高度。如图所示，在阳光下，塔身 PQ 在地面上的影子为 AP ，某同学站在影子 AP 上的点 B 处，他的影子刚好为 AB ，此时测得 $AB = 2\text{ m}$ ， $BP = 34\text{ m}$ ，已知该同学的身高 $BC = 1.72\text{ m}$ ，求火炬塔身 PQ 的高度。(结果精确到 1 m)



18. (本小题满分 8 分)

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，菱形 $ABCD$ 的周长为 24.

- (1)求对角线 BD 的长;
- (2)求菱形 $ABCD$ 的面积.



19. (本小题满分 10 分)

小明、小颖和小凡做“剪刀、石头、布”游戏. 游戏规则如下:

由小明和小颖做“剪刀、石头、布”的游戏, 如果两人的手势相同, 那么小凡获胜; 如果两人手势不同, 那么按照“石头胜剪刀, 布胜石头, 剪刀胜布”的规则决定小明和小颖中的获胜者.



假设小明和小颖每次出这三种手势的可能性相同.

(1)利用画树状图或列表的方法表示小明和小颖做“剪刀、石头、布”游戏的所有可能出现的结果(其中剪刀、石头、布分别用番号①、②、③表示);

(2)在(1)的基础上, 试说明该游戏对三人是否公平?

20. (本小题满分 10 分)

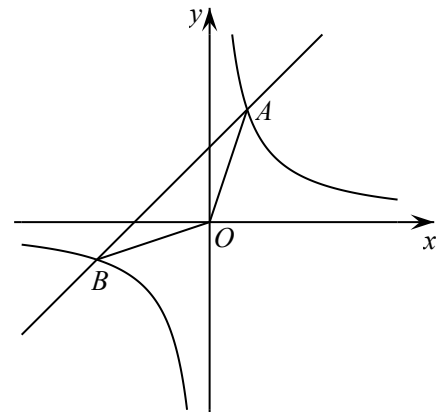
如图, 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点, 且点 A 的横坐标为 1,

连接 OA, OB .

(1)求一次函数的表达式及点 B 的坐标;

(2)求 $\triangle ABO$ 的面积;

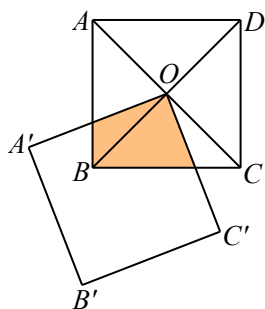
(3)点 P 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上, 连接 AP, BP , 若 $\triangle ABP$ 的面积是 $\triangle ABO$ 的面积的 2 倍, 求满足条件的点 P 的坐标.



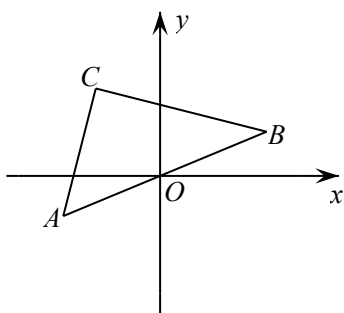
B 卷(共 50 分)

一、填空题(本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 答案写在答题卡上)

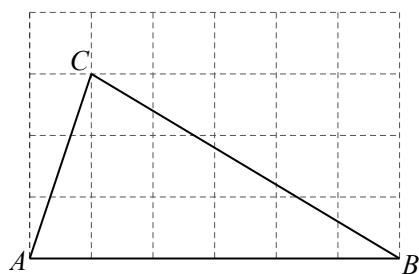
21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的一个根是 2, 则它的另一个根为_____.
22. 在一个有 6000 人的小镇, 随机调查了 200 人, 其中有 30 人看某电视台的早间新闻, 则估计该小镇看该电视台早间新闻的人数约有_____人.
23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 正方形 $A'B'C'O$ 与正方形 $ABCD$ 的边长相等, 若两个正方形重叠部分(阴影部分)的面积为 $\sqrt{7}$, 则正方形 $A'B'C'O$ 的面积为_____.



第 23 题图



第 24 题图



第 25 题图

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 经过原点 O , $AC = 6$, $BC = 8$, 若将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 顺时针旋转到某个位置时, $\triangle ABC$ 的三个顶点恰好都落在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, 则 k 的值为_____.
25. 定义: 有无数个小正方形组成的网格中, 每个小正方形的顶点即为格点, 顶点都在格点上的三角形叫做格点三角形. 在格点三角形中, 其内部(包含边界)的完整小正方形的个数与这个格点三角形的面积的比叫做这个格点三角形的“方正系数”. 如图, 在 4×6 的网格中, 格点 $\triangle ABC$ 的面积为 9, 其内部有 4 个完整的小正方形, 所以格点 $\triangle ABC$ 的“方正系数”是 $\frac{4}{9}$. 若该 4×6 的网格中另有一格点 P , 连接 PA, PB , 则格点 $\triangle ABP$ 的“方正系数”的最大值为_____.

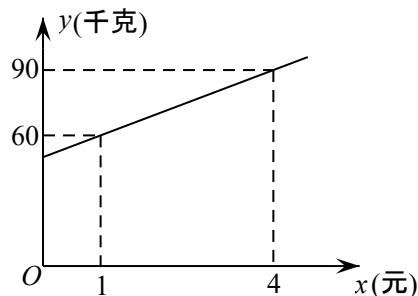
二、解答题(本大题共 3 个小题, 共 30 分, 解答过程写在答题卡上)

26. (本小题满分 8 分)

某水果经销商以 10 元/千克的价格向当地果农收购某种水果, 该水果的市场销售价格为 20 元/千克, 根据市场调查, 经销商决定降价销售. 已知这种水果日销售量 y (千克)与每千克降价 x (元)($0 \leq x < 10$)之间满足如图所示的一次函数关系.

(1)求 y 与 x 之间的关系式;

(2)若经销商计划该种水果每日获利 440 元, 那么该种水果每千克应降价多少元进行销售? 其相应的日销售量为多少?



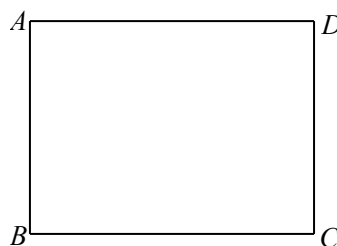
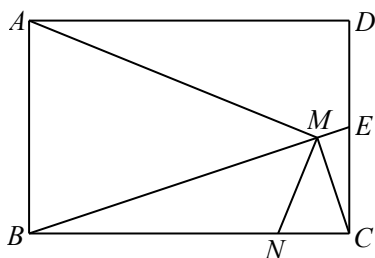
27. (本小题满分 10 分)

如图, 已知矩形 $ABCD$, 点 E 在边 CD 上, 连接 BE , 过 C 作 $CM \perp BE$ 于点 M , 连接 AM , 过 M 作 $MN \perp AM$, 交 BC 于点 N .

(1) 求证: $\triangle MAB \sim \triangle MNC$;

(2) 若 $AB = 4$, $BC = 6$, 且点 E 为 CD 的中点, 求 BN 的长;

(3) 若 $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$, 且 MB 平分 $\angle AMN$, 求 $\frac{CE}{BN}$ 的值.



备用图

28. (本小题满分 12 分)

【阅读理解】

定义：在同一平面内，有不在同一直线上的三点 M, N, P ，连接 PM, PN ，设 $\angle MPN = \alpha$ ， $\frac{PM}{PN} = k$ ，则我们把 (α, k) 称为点 M 到 N 关于点 P 的“度比坐标”，把 $(\alpha, \frac{1}{k})$ 称为点 N 到 M 关于点 P 的“度比坐标”。

【迁移应用】

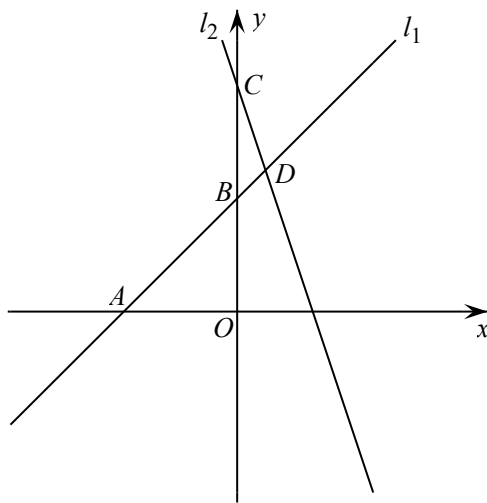
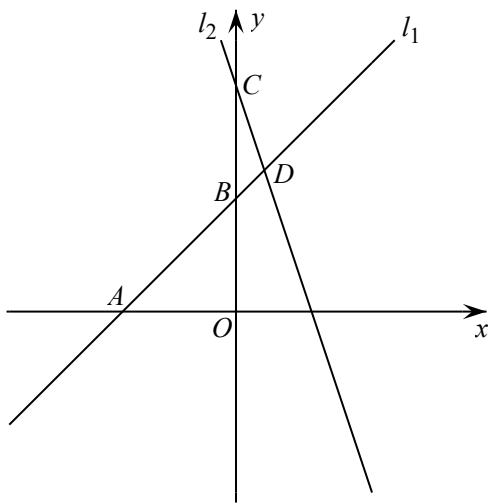
如图，直线 $l_1: y = x + 5$ 分别与 x 轴， y 轴相交于 A, B 两点，过点 $C(0, 10)$ 的直线 l_2 与 l_1 在第一象限内相交于点 D 。根据定义，我们知道点 A 到 C 关于点 O 的“度比坐标”为 $(90^\circ, \frac{1}{2})$ 。

- (1) 请分别直接写出 A, B 两点的坐标及点 B 到 A 关于点 O 的“度比坐标”；
- (2) 若点 A 到 C 关于点 D 的“度比坐标”与点 C 到 B 关于点 D 的“度比坐标”相同。

i) 求直线 l_2 的函数表达式；

ii) 点 E, F 分别是直线 l_1, l_2 上的动点，连接 OE, OF ，若点 E 到 F 关于点 O 的“度比坐标”为 $(90^\circ, \frac{3}{5})$ ，

求此时点 E 的坐标。



备用图

九年级数学

A 卷 (共 100 分)

第 I 卷 (共 30 分)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	C	B	B	A	C	D	C	D

第 II 卷 (共 70 分)

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

11. 2 12. $\sqrt{5}$ 13. 21 14. $(10\sqrt{5}-10)$. (没加括号不扣分, $10(\sqrt{5}-1)$ 不扣分)

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 共 54 分)

15. (本小题满分 12 分, 每题 6 分)

解: (1) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$. ……2 分

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}. \quad \text{……4 分}$$

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}. \quad \text{……6 分}$$

(2) $(x-2)(x-2+2) = 0$, $\therefore x(x-2) = 0$, ……2 分

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0. \quad \text{……4 分}$$

$$\therefore x_1 = 0, \quad x_2 = 2. \quad \text{……6 分}$$

16. (本小题满分 6 分)

解: 设 $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = k$, ($k \neq 0$), ……1 分

$$\therefore a = 6k, \quad b = 5k, \quad c = 4k. \quad \text{……2 分}$$

$$\therefore a + b - 2c = 3, \quad \therefore 6k + 5k - 2 \times 4k = 3. \quad \text{……4 分}$$

$$\text{解得 } k = 1. \quad \text{……5 分}$$

$$\therefore a = 6k = 6. \quad \text{……6 分}$$

17. (本小题满分 8 分)

解: $\because AB = 2\text{m}, BP = 34\text{m},$
 $\therefore AP = AB + BP = 36 \text{ (m)}. \quad \text{……1 分}$

$$\because \angle APQ = \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle A = \angle A, \quad \text{……3 分}$$

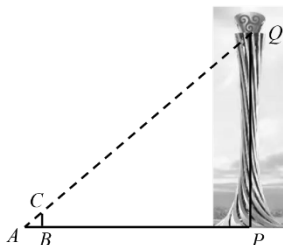
$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC. \quad \text{……4 分}$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}, \quad \text{即 } \frac{36}{2} = \frac{PQ}{1.72}. \quad \text{……5 分}$$

$$\text{解得 } PQ = 30.96 \quad \text{……6 分}$$

$$\approx 31 \text{ (m)}. \quad \text{……7 分}$$

所以, 火炬塔塔身 PQ 的高度为 31m. ……8 分



18. (本小题满分 8 分)

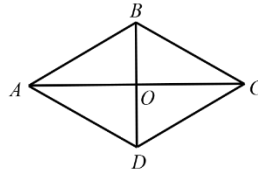
解: (1) ∵ 菱形 $ABCD$ 的周长为 24,

$$\therefore AB = AD = \frac{1}{4} \times 24 = 6.$$

又 ∵ $\angle BAD = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形.

$$\therefore BD = 6.$$



……2 分

……3 分

……4 分

(2) ∵ 菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ,

$$\therefore AC \perp BD, \text{ 且 } OB = \frac{1}{2}BD = 3, \quad AC = 2OA.$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 3\sqrt{3}.$$

……5 分

$$\therefore AC = 2OA = 6\sqrt{3}.$$

……6 分

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \quad (\text{写出第一步或第二步都可以得 1 分})$$

……7 分

$$= 18\sqrt{3}.$$

……8 分

19. (本小题满分 10 分)

解: (1) 列表如下:

小颖 小明	①	②	③
①	(①, ①)	(①, ②)	(①, ③)
②	(②, ①)	(②, ②)	(②, ③)
③	(③, ①)	(③, ②)	(③, ③)

……5 分

(2) 由表可知, 共有 9 种等可能性的结果, 其中两人的手势相同的结果有 3 种,

小明获胜的结果有 3 种, 小颖获胜的结果有 3 种.

……6 分

$$\therefore P(\text{小凡获胜}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{小明获胜}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{小颖获胜}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

……9 分

∴ $P(\text{小凡获胜}) = P(\text{小明获胜}) = P(\text{小颖获胜})$ (这步没写不扣分)

∴ 该游戏对三人是公平的.

……10 分

20. (本小题满分 10 分)

解: (1) \because 点 A 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上, 且点 A 的横坐标为 1,

$\therefore A(1, 3)$1 分

\because 点 $A(1, 3)$ 在直线 $y = kx + 2$ 上, $\therefore k + 2 = 3$. $\therefore k = 1$.

\therefore 一次函数的表达式为 $y = x + 2$2 分

联立 $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = \frac{3}{x}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -1. \end{cases} \therefore B(-3, -1)$3 分

(2) 如图, 设直线 $y = x + 2$ 与 y 轴交于点 M , 则 $M(0, 2)$.

$\therefore S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|y_M| \cdot |x_A| = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2}|y_M| \cdot |x_B| = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$5 分

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM} = 4$6 分

(3) 在 y 轴上取一点 N , 使得 $MN = 2OM$. 连接 AN, BN .

$\therefore S_{\triangle AMN} = 2S_{\triangle AOM}, S_{\triangle BMN} = 2S_{\triangle BOM}$,

且点 N 的坐标为 $N_1(0, 6)$ 或 $N_2(0, -2)$.

$\therefore S_{\triangle ABN} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle BMN} = 2S_{\triangle AOM} + 2S_{\triangle BOM} = 2S_{\triangle AOB}$.

过点 $N_1(0, 6)$ 作 $l_1 \parallel AB$, $\therefore l_1: y = x + 6$.

联立 $\begin{cases} y = x + 6 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = -3 + 2\sqrt{3} \\ y_1 = 3 + 2\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 - 2\sqrt{3} \\ y_2 = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$ 8 分

$\therefore P_1(-3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}), P_2(-3 - 2\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$.

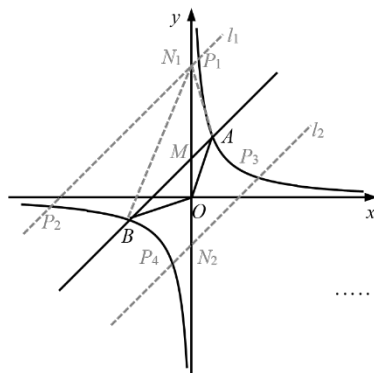
同理, 过点 $N_2(0, -2)$ 作 $l_2 \parallel AB$, $\therefore l_2: y = x - 2$.

联立 $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$ 10 分

$\therefore P_3(3, 1), P_4(-1, -3)$.

综上所述, 满足条件的点 P 的坐标为: $P_1(-3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}),$

$P_2(-3 - 2\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}), P_3(3, 1), P_4(-1, -3)$. (四个 P 点坐标各 1 分)



B 卷 (共 50 分)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

21. -3 22. 900 23. $4\sqrt{7}$ 24. $\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{7}{2}$ (写对 1 个, 得 2 分) 25. $\frac{2}{3}$.

二、解答题 (本大题共 3 个小题, 共 30 分)

26. (本小题满分 8 分)

解: (1) 设 $y = kx + b$, 由题意, 得 $\begin{cases} k + b = 60, \\ 4k + b = 90. \end{cases}$ 1 分

解得 $\begin{cases} k = 10, \\ b = 50. \end{cases}$ 3 分

$\therefore y$ 与 x 之间的关系式为 $y = 10x + 50$4 分

(2) 由题意, 得 $(20-x-10)(10x+50)=440$ 5分

整理, 得 $x^2-5x-6=0$.

解得 $x_1=6$, $x_2=-1$ (舍去).6分

当 $x=6$ 时, $y=10 \times 6 + 50 = 110$7分

答: 该种水果每千克应降价 6 元进行销售, 其相应的日销售量为 110 千克.8分

27. (本小题满分 10 分)

证明: (1) $\because \angle ABC = 90^\circ, CM \perp BE, MN \perp AM,$

$\therefore \angle MBA = 90^\circ - \angle MBC = \angle MCN$1分

$\angle BMA = 90^\circ - \angle BMN = \angle CMN$2分

$\therefore \triangle MAB \sim \triangle MNC$3分

解: (2) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $CD=AB=4$.

$\because E$ 为 CD 中点, $\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 2$.

$\because \angle BCE = 90^\circ, CM \perp BE,$

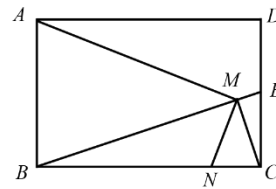
$\therefore \triangle BMC \sim \triangle BCE$.

$\therefore \frac{BM}{CM} = \frac{BC}{CE}$, 即 $\frac{BM}{CM} = \frac{6}{2} = 3$.

$\because \triangle MAB \sim \triangle MNC, \therefore \frac{AB}{CN} = \frac{BM}{CM} = 3$.

$\therefore CN = \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}$5分

$\therefore BN = BC - CN = \frac{14}{3}$6分



(3) 如图, 连接 AN .

$\because \triangle MAB \sim \triangle MNC, \therefore \frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC}, \angle BMA = \angle CMN$.

$\therefore \frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MC}$. 又 $\because \angle AMN = \angle BMC = 90^\circ, \therefore \triangle MAN \sim \triangle MBC$7分

$\therefore \angle MAN = \angle MBC$.

$\therefore \angle ANB = \angle AMB = \frac{1}{2} \angle AMN = 45^\circ$.

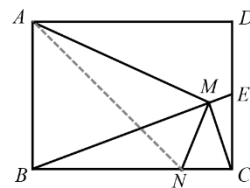
\therefore 在 $Rt\triangle ABN$ 中, $AB=BN$.

$\therefore \frac{BN}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$.

$\therefore \frac{CN}{AB} = \frac{CN}{BN} = \frac{1}{3}, BN = \frac{3}{4}BC$.

$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CM}{BM} = \frac{CN}{AB} = \frac{1}{3}$. 即 $CE = \frac{1}{3}BC$. (得到 $BN = \frac{3}{4}BC$ 或 $CE = \frac{1}{3}BC$ 都给 1 分)9分

$\therefore \frac{CE}{BN} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{3}{4}BC} = \frac{4}{9}$10分



28. (本小题满分 12 分)

解: (1) $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, 点 B 到点 A 关于点 O 的“度比坐标”为 $(90^\circ, 1)$. ……3 分

(2) i) \because 点 A 到 C 关于点 D 的“度比坐标”与点 C 到 B 关于点 D 的“度比坐标”相同,

$$\therefore \frac{DA}{DC} = \frac{DC}{DB}. \quad \text{……4 分}$$

$$\therefore DC^2 = DA \cdot DB.$$

设点 $D(a, a+5)$, $\because A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(0, 10)$,

$$\therefore \text{由两点之间距离公式可得 } DB = 2\sqrt{a}, \quad DA = 2(a+5),$$

$$DC^2 = a^2 + (a+5-10)^2 = 2a^2 - 10a + 25.$$

$$\therefore 2a^2 - 10a + 25 = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{2}(a+5). \quad \text{……5 分}$$

$$\text{解得 } a = \frac{5}{4}. \quad \text{……6 分}$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{4}, \frac{25}{4}\right). \quad \text{……7 分}$$

由 $C(0, 10)$, 设 l_2 的函数表达式为 $y = kx + 10$,

$$\therefore \frac{5}{4}k + 10 = \frac{25}{4}, \text{ 解得 } k = -3.$$

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的函数表达式为 } y = -3x + 10. \quad \text{……8 分}$$

ii) 方法一:

$$\because \text{点 } E \text{ 到 } F \text{ 关于点 } O \text{ 的“度比坐标”为 } \left(90^\circ, \frac{3}{5}\right),$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ, \quad \frac{OE}{OF} = \frac{3}{5}. \quad \text{……9 分}$$

作 $EP \perp x$ 轴于点 P , $FQ \perp x$ 轴于点 Q , 则 $\triangle EPO \sim \triangle OQF$.

$$\therefore \frac{EP}{OQ} = \frac{OP}{FQ} = \frac{OE}{OF} = \frac{3}{5}. \quad \text{……10 分}$$

设 $OP = 3m$, $EP = 3n$, 则 $FQ = 5m$, $OQ = 5n$.

①如图 1, 则 $E(-3m, 3n)$, $F(5n, 5m)$.

$$\text{由点 } E, F \text{ 分别在直线 } l_1, l_2 \text{ 上, 得 } \begin{cases} -3m + 5 = 3n, \\ -3 \times 5n + 10 = 5m. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = \frac{3}{2}, \\ n = \frac{1}{6}. \end{cases} \therefore E_1\left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad \text{……11 分}$$

②如图 2, 则 $E(-3m, -3n)$, $F(5n, -5m)$.

$$\text{由点 } E, F \text{ 分别在直线 } l_1, l_2 \text{ 上, 得 } \begin{cases} -3m + 5 = -3n, \\ -3 \times 5n + 10 = -5m. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{7}{2} \\ n = \frac{11}{6} \end{cases}, \therefore E_2 \left(-\frac{21}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

……12分

综上, $E_1 \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right), E_2 \left(-\frac{21}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

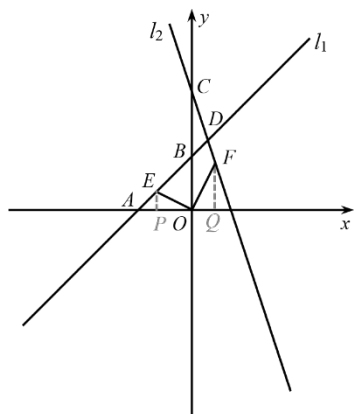


图1

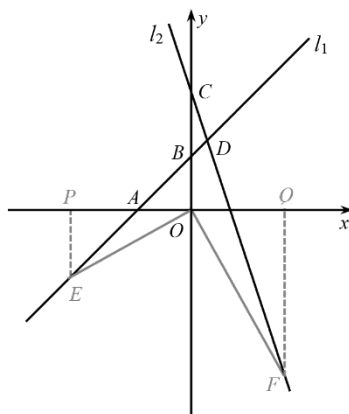


图2

方法二:

如图3, 设 l_2 与 x 轴交于点 M , 则 $OM = \frac{10}{3}$.

在 y 轴上取点 K , 使得 $OK = \frac{3}{5}OM = 2$.

(OK 可看成由 OM 旋转 90° , 并缩短为原来的 $\frac{3}{5}$ 而得到的).

$\therefore K_1(0, 2), K_2(0, -2)$.

过点 K 作 l_2 的垂线,

得 $l_3: y = \frac{1}{3}x + 2$, 或 $l_4: y = \frac{1}{3}x - 2$.

\therefore 点 E 也在直线 l_3 或 l_4 上 (可由相似证明)

$$\text{联立 } l_1, l_3, \text{ 得} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2, \\ y = x + 5. \end{cases}$$

解得 $E_1 \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{联立 } l_1, l_4, \text{ 得} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2, \\ y = x + 5. \end{cases}$$

解得 $E_2 \left(-\frac{21}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

综上, $E_1 \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right), E_2 \left(-\frac{21}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

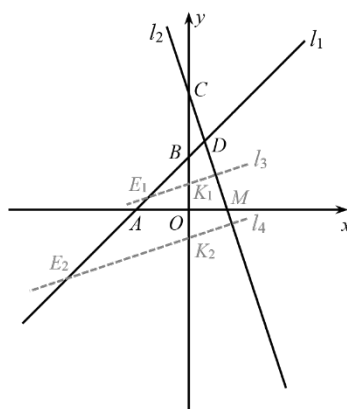


图3